1.5. POTĘGOWANIE

Potęga o wykładniku naturalnym

$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n}$

a^n - n – ta potęga liczby a

a - podstawa potęgi

$n \in N$ - wykładnik potęgi

$a^0 = 1; \quad a \neq 0$

$a^1 = a$

$1^n = 1$

$0^n = 0; \quad n \neq 0$

0^0 – nie istnieje

Potęga o wykładniku parzystym jest liczbą dodatnią

Potęga o wykładniku nieparzystym i podstawie ujemnej jest liczbą ujemną.

Przykład 1.5.1. Oblicz

a) $\left(1\frac{1}{3}\right)^3$ b) 12^0 c) $(-0,3)^4$ d) -5000^2

Rozwiązanie	Komentarz
a) $\left(1\frac{1}{3}\right)^3 = \left(\frac{4}{3}\right)^3 =$ $= \frac{4}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{3} = \frac{64}{27} = 2\frac{10}{27}$	Potęgując liczbę mieszaną zamieniamy ją na ułamek niewłaściwy. Korzystamy z definicji $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n}$
b) $12^0 = 1$	Korzystamy z własności $a^0 = 1$
c) $(-0,3)^4 = -0,3\cdot(-0,3)\cdot(-0,3)\cdot(-0,3) = 0,0081$	Pamiętamy, że potęga o wykładniku parzystym jest liczbą dodatnią.
d) $-5000^2 = -5000\cdot 5000 = -25000000$	- 5000 nie jest w nawiasie , dlatego do kwadratu podnosimy tylko 5000.

Potęga o wykładniku całkowitym ujemnym

$$a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n \quad \text{gdzie } a \neq 0$$

<u>Przykład 1.5.2.</u> Oblicz

a) 2^{-4} b) $\left(-2\frac{1}{2}\right)^{-2}$ c) $0{,}03^{-1}$ d) $\left(-2\sqrt{3}\right)^{-5}$

Rozwiązanie	Komentarz
a) $2^{-4} = \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$	Korzystamy z definicji $a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$
b) $\left(-2\frac{1}{2}\right)^{-2} = \left(-\frac{5}{2}\right)^{-2} =$ $= \left(-\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{4}{25}$	Liczbę mieszaną zamieniamy na ułamek niewłaściwy. Korzystamy z definicji $a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$
c) $0{,}03^{-1} = \left(\frac{3}{100}\right)^{-1} =$ $= \left(\frac{100}{3}\right)^1 = \frac{100}{3} = 33\frac{1}{3}$	Ułamek dziesiętny zamieniamy na ułamek zwykły. Korzystamy z definicji $a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$

<u>Przykład 1.5.3.</u> Podane liczby zapisz w postaci iloczynu liczb wymiernej i potęgi liczby 10.

a) 120000000 b) 0,0000056

Rozwiązanie	Komentarz
a) $120000000 = 12 \cdot 10^7$	Zauważmy , że $10^7 = 10000000$
b) $0{,}0000056 = 56 \cdot 10^{-7}$	Zauważmy , że $10^{-7} = 0{,}0000001$

Przykład 1.5.4. Oblicz: $\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{-3} - 4^1\right]^{-2}$

Rozwiązanie	Komentarz
$\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{-3} - 4^1\right]^{-2} = \left[\left(\frac{3}{2}\right)^{3} - 4\right]^{-2} =$ $= \left[\frac{27}{8} - \frac{4}{1}_{/\cdot 8}\right]^{-2} =$ $= \left[\frac{27}{8} - \frac{32}{8}\right]^{-2} =$ $= \left(-\frac{5}{8}\right)^{-2} =$ $= \left(-\frac{8}{5}\right)^{2} = \frac{64}{25} = 2\frac{14}{25}$	Pamiętamy o kolejności wykonywania działań. Korzystamy z definicji $a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$

Potęga o wykładniku wymiernym

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}\text{, gdzie } n \geq 1, m \in C$$

Przykład 1.5.5. Oblicz

a) $\left(5\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{4}}$, b) $16^{\frac{5}{4}}$, c) $4^{-0,5}$.

Rozwiązanie	Komentarz
a) $\left(5\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{4}} = \left(\frac{81}{16}\right)^{\frac{1}{4}} =$ $= \sqrt[4]{\frac{81}{16}} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$	Liczbę mieszaną zamieniamy na ułamek niewłaściwy. Korzystamy z definicji $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$
b) $16^{\frac{5}{4}} = \sqrt[4]{16^5} =$ $= \left(\sqrt[4]{16}\right)^5 = 2^5 = 32$	Korzystamy z definicji $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ i z własności $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$

c) $4^{-0,5} = 4^{-\frac{1}{2}} =$ $= \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} =$ $= \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$	Ułamek dziesiętny zamieniamy na ułamek zwykły. Korzystamy z definicji $a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^{n}$ Korzystamy z definicji $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$

<u>Przykład 1.5.6.</u> Podaną liczbę przedstaw w postaci $7^{\frac{m}{n}}$

a) $\sqrt{7}$ b) $\sqrt[3]{49}$ c) $\frac{1}{\sqrt[5]{7^3}}$

Rozwiązanie	Komentarz
a) $\sqrt{7} = 7^{\frac{1}{2}}$	Korzystamy z definicji $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$
b) $\sqrt[3]{49} = \sqrt[3]{7^2} = 7^{\frac{2}{3}}$	Korzystamy z definicji $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$
c) $\frac{1}{\sqrt[5]{7^3}} = \frac{1}{7^{\frac{3}{5}}} =$ $= 7^{-\frac{3}{5}}$	Korzystamy z definicji $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ Korzystamy z definicji $a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^{n}$

Prawa działań na potęgach

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

$$a^n : a^m = a^{n-m}$$

$$\left(a^n\right)^m = a^{n \cdot m}$$

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$$

$$a^n : b^n = (a : b)^n$$

Przykład 1.5.7. Wykonaj działania ,stosując prawa działań na potęgach:

$$\frac{\left(a^2\right)^{-3} \cdot a^4}{a}$$

Rozwiązanie	Komentarz
$\frac{\left(a^2\right)^{-3} \cdot a^4}{a} = \frac{a^{2\cdot(-3)} \cdot a^4}{a^1} = \frac{a^{-6} \cdot a^4}{a^1} =$	Korzystamy ze wzoru $\left(a^n\right)^m = a^{n\cdot m}$
$= \frac{a^{-6+4}}{a^1} = \frac{a^{-2}}{a^1} =$	Korzystamy ze wzoru $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$
$= a^{-2} : a^1 = a^{-2-1} = a^{-3}$	Korzystamy ze wzoru $a^n : a^m = a^{n-m}$

Przykład 1.5.8. Przedstaw w postaci potęgi

a) $\sqrt{2\sqrt{8\sqrt[3]{2}}}$

Rozwiązanie	Komentarz
$\sqrt{2\sqrt{8\sqrt[3]{2}}} = \sqrt{2\sqrt{2^3\sqrt[3]{2}}} =$	Zapisujemy 8 w postaci potęgi 2
$= \left[2\left(2^3 \cdot 2^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{2}} = \left[2\left(2^{3\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{2}} = \left[2 \cdot 2^{\frac{10}{3}\cdot\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{2}} =$	Zmieniamy pierwiastki na potęgi .
$= \left[2^1 \cdot 2^{\frac{5}{3}}\right]^{\frac{1}{2}} = \left[2^{\frac{3}{3}+\frac{5}{3}}\right]^{\frac{1}{2}} = \left[2^{\frac{8}{3}}\right]^{\frac{1}{2}} =$	Korzystając z praw działań na potęgach , doprowadzamy wyrażenie do jednej potęgi.
$= 2^{\frac{8}{3}\cdot\frac{1}{2}} = 2^{\frac{4}{3}}$	

b) $\dfrac{\sqrt[3]{25}\cdot\frac{1}{125}\cdot 25^{-1}}{\frac{1}{5}\cdot\sqrt{5}}$

Rozwiązanie	Komentarz
$\dfrac{\sqrt[3]{25}\cdot\frac{1}{125}\cdot 25^{-1}}{\frac{1}{5}\cdot\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt[3]{5^2}\cdot 5^{-3}\cdot\left(5^2\right)^{-1}}{5^{-1}\cdot\sqrt{5}} =$ $= \dfrac{5^{\frac{2}{3}}\cdot 5^{-3}\cdot\left(5^2\right)^{-1}}{5^{-1}\cdot 5^{\frac{1}{2}}} = = \dfrac{5^{\frac{2}{3}}\cdot 5^{-3}\cdot 5^{-2}}{5^{-1}\cdot 5^{\frac{1}{2}}} =$ $\dfrac{5^{\frac{2}{3}+(-3)+(-2)}}{5^{-1+\frac{1}{2}}} = \dfrac{5^{-4\frac{1}{3}}}{5^{-\frac{1}{2}}} = 5^{-\frac{13}{3}} : 5^{-\frac{1}{2}} = 5^{-\frac{13}{3}-\left(-\frac{1}{2}\right)} =$ $= 5^{-\frac{26}{6}+\frac{3}{6}} = 5^{-\frac{23}{6}}$	Zapisujemy wszystkie czynniki w postaci potęgi 5. Zmieniamy pierwiastki na potęgi . Korzystając z praw działań na potęgach , doprowadzamy wyrażenie do jednej potęgi.

ĆWICZENIA

Ćwiczenie 1.5.1. Oblicz:

a) (1pkt.) 1^7 b) (1pkt.) $(-0{,}2)^5$ c) (1pkt.) 400^3

d) (1pkt.) $(-2)^{-4}$ e) (1pkt.) $(-0{,}3)^{-3}$ f) (1pkt.) $\left(\dfrac{3}{\sqrt{2}}\right)^{-4}$

g) (1pkt.) $\left(2\dfrac{7}{9}\right)^{\frac{1}{2}}$, h) (1pkt.) $8^{-\frac{2}{3}}$

schemat oceniania

Numer odpowiedzi	**Odpowiedź**	**Liczba punktów**
1	Podanie wyniku.	1

Ćwiczenie 1.5.2. Zapisz podane liczby bez użycia potęg:

a) (1pkt.) $7{,}2\cdot 10^6$ b) (1pkt.) $124\cdot 10^{-5}$

schemat oceniania

Numer odpowiedzi	**Odpowiedź**	**Liczba punktów**
1	Podanie wyniku.	1

Ćwiczenie 1.5.3. (2pkt.) Oblicz: $\left(\frac{2^0}{3}\cdot 4^{-0,5}+2^{-2}\right)^{-1}$

schemat oceniania

Numer odpowiedzi	Odpowiedź	Liczba punktów
1	Obliczenie potęg w nawiasie.	1
2	Podanie ostatecznego wyniku.	1

Ćwiczenie 1.5.4. (1pkt.) Przedstaw w postaci potęgi : $3\sqrt[3]{5+\sqrt{16}}$

schemat oceniania

Numer odpowiedzi	Odpowiedź	Liczba punktów
1	Podanie wyniku.	1

Ćwiczenie 1.5.5. (2pkt.) Wykonaj działanie ,stosując prawa działań na potęgach:

$$\frac{16^{-1}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}}{\sqrt[3]{4}\cdot\left(\frac{1}{8}\right)^2}$$

schemat oceniania

Numer odpowiedzi	Odpowiedź	Liczba punktów
1	Zapisanie wszystkich czynników w postaci potęgi 2.	1
2	Podanie ostatecznego wyniku.	1

Ćwiczenie 1.5.6. (1pkt.) Sprowadź do najprostszej postaci wyrażenie: $\left(x^{\sqrt{2}}\cdot\left(\sqrt{x}\right)^{\sqrt{8}}\right)^{\sqrt{2}}$

schemat oceniania

Numer odpowiedzi	Odpowiedź	Liczba punktów
1	Podanie wyniku.	1